Virtuelle Zahlen als Grenzwerte, Amd 1

Wir definieren eine Funktion $v(x)$, die sich einem bestimmten komplexen Wert nÃ¤hert:

$$v(x) := e^{i \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to \infty} v(x)^3 = i$$

Hinweis zur Eindeutigkeit

Da die komplexe Exponentialfunktion $e^{i\theta}$ periodisch ist mit Periode 2π, ist ihre Umkehrung (z.B. das Wurzelziehen) nicht eindeutig.

Im konkreten Fall nÃ¤hert sich $v(x)$ dem Wert $e^{i\pi/6}$. Dieser ist eine von drei mÃ¶glichen Kubikwurzeln von i, denn:

$$\sqrt[3]{i} = e^{i \cdot (\pi/2 + 2\pi k)/3}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Damit die Aussage $\lim_{x \to \infty} v(x)^3 = i$ eindeutig ist, muss man festlegen, welchen Zweig des komplexen Exponentials man betrachtet â€” z. B. den Hauptzweig mit $\theta \in (-\pi, \pi]$.